Εισαγωγή στην Τοπολογία, 19/9/2022, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)
Δίνεται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος X. Πότε μια συνάρτηση $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ καλείται νόρμα; Αν $\|\ \|$ είναι μια νόρμα στο X να ορίσετε τη μετρική που ορίζει αυτή η νόρμα και να αποδείξετε ότι είναι πράγματι μια μετρική στο X.

Θέμα 2. (1,5 μον.)
α) Να αναφέρετε όλα τα ανοικτά υποσύνολα A του $\mathbb{R}$ για τα οποία $\partial(A) = \{1, 2, 3\}$ (υπάρχουν οκτώ τέτοια σύνολα).

β) Να αναφέρετε όλα τα κλειστά υποσύνολα B του $\mathbb{R}$ για τα οποία $\partial(B) = \{1, 2, 3\}$ (υπάρχουν οκτώ τέτοια σύνολα).

Θέμα 3. (2 μον.)
Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου και να αποδείξετε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Θέμα 4. (2 μον.)
Αν X και Y είναι δυο συνεκτικοί μετρικοί χώροι να δείξετε ότι ο $X \times Y$, αν εφοδιαστεί με μια μετρική γινόμενο, είναι συνεκτικός.

Θέμα 5. (3 μον.)
α) Συμπληρώστε και αποδείξτε τον χαρακτηρισμό της κλειστής θήκης με χρήση ακολουθιών:
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Ισχύει $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν ....

Στη συνέχεια να διατυπώσετε και να αποδείξετε το χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων ενός μετρικού χώρου με χρήση ακολουθιών:

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι κλειστό αν και μόνο αν ....

β) Έστω (X, ρ), (Y, d) δυο μετρικοί χώροι και σ μια μετρική γινόμενο στο $Z = X \times Y$. Έστω επίσης $g : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε

$$A = \big\{(x, y) \in X \times Y :\ y = g(x)\big\}.$$

Να δειχθεί ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $Z = X \times Y$. [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων με χρήση ακολουθιών.]

Καλή Επιτυχία!